太原市2024年高三年级模拟考试（二）
数学参考答案及评分建议

一．选择题： B D C A B C A C

二．选择题： BC BC ACD

三．填空题： 12. $[-1,+\infty)$ 13. $166,45$ 14. $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$

四．解答题：

15.解：（1）当密码中只有一个数字出现三次且其余两个数字各出现一次时，则其不同种数为$C_3^1C_5^3A_2^2=60$，

当密码中有两个数字各出现两次且另一个数字出现一次时，则其不同种数为$C_3^2C_5^2C_3^2A_1^1=90$，

$\therefore$该款行李箱密码的不同种数$60+90=150$． ………5分

（2）由题意得X所有可能的取值为$1,2,3$，

$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_5^3A_2^2+C_5^2C_3^2A_1^1}{150}=\dfrac{70}{150}=\dfrac{7}{15}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^1C_5^2C_3^2A_1^1}{150}=\dfrac{60}{150}=\dfrac{2}{5}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3A_2^2}{150}=\dfrac{20}{150}=\dfrac{2}{15}$， ………11分

$\therefore X$的分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{2}{15}$

$\therefore E(X)=1\times\dfrac{7}{15}+2\times\dfrac{2}{5}+3\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{5}{3}$． ………13分

16.解：（1）由题意过点$D(2,1)$且斜率为1的直线方程为$y-1=x-2$，即$y=x-1$，

令$y=0$，则$x=1$，$\therefore$点F的坐标为$(1,0)$， ………4分

$\therefore\dfrac{p}{2}=1$，$\therefore p=2$，$\therefore$抛物线C的方程为$y^2=4x$． ………7分

（2）由（1）得抛物线$C:y^2=4x$，假设存在定点$M(m,0)$，

设直线AB的方程为$x=ty+m(t\in R)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x=ty+m,\\y^2=4x\end{cases}$得$y^2-4ty-4m=0$，$\therefore y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4m$， ………10分

$\because OA\perp OB$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(ty_1+m)(ty_2+m)+y_1y_2=(t^2+1)y_1y_2+tm(y_1+y_2)+m^2$

$=-4m(t^2+1)+4mt^2+m^2=m^2-4m=0$，$\therefore m=4$或$m=0$（舍去）， ………14分

当$m=4$时，点M的坐标为$(4,0)$，满足$OA\perp OB$，$\therefore$存在定点$M(4,0)$． ………15分

17.解：（1）延长FE交HM的延长线于点N，连接DN，取AE的中点K，连接KH，

$\because EF // AB$，H 是 BF 的中点，$\therefore KH // EF$，且 $KH=\frac{1}{2}(AB+EF)=6$， ………2 分

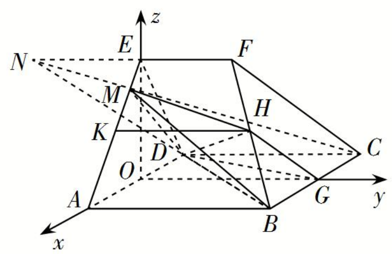
$\because G,H$ 分别是 BC,BF 的中点，$\therefore GH // CF$，

$\therefore GH //$ 平面 $CDEF$，$\therefore GH // DN$，$\therefore CF // DN$，

$\because ABCD$ 是正方形，$\therefore AB // CD // EF$，$\therefore CDNF$ 是平行四边形， ………6 分

$\because KH // NE$，$\therefore \frac{EM}{MK}=\frac{NE}{KH}=\frac{NF-EF}{KH}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{EM}{MA}=\frac{2}{5+3}=\frac{1}{4}$； ………8 分



（2）取 AD 的中点 O，连接 OE，

$\because \triangle ADE$ 是正三角形，$\therefore OE \perp AD$，

$\because$ 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore OE \perp$ 平面 $ABCD$， ………9 分

以 O 为原点，OA,OG,OE 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(0,0,0)$，$D(-4,0,0)$，$B(4,8,0)$，$C(-4,8,0)$，$M(\frac{4}{5},0,\frac{16\sqrt{3}}{5})$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 BDM 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{DB},\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{DM},\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}8x_1+8y_1=0,\\ \frac{24}{5}x_1+\frac{16\sqrt{3}}{5}z_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=-\sqrt{3}$，则 $x_1=2,y_1=-2$，$\therefore \vec{m}=(2,-2,-\sqrt{3})$， ………11 分

设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 CDM 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{DC},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DM},\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}8y_2=0,\\ \frac{24}{5}x_2+\frac{16\sqrt{3}}{5}z_2=0,\end{cases}$

取 $z=-\sqrt{3}$，则 $x_2=2,y_2=0$，$\therefore \vec{n}=(2,0,-\sqrt{3})$， ………13 分

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{77}}{11}$，

$\therefore$ 平面 BDM 与平面 CDM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{77}}{11}$. ………15 分

18. 解：（1）当 $a=1$ 时，$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}\ln(x+1)-\frac{1}{x}$，$\therefore f'(1)=\ln 2$，

$\therefore f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$，

即 $y=f'(1)(x-1)+f(1)=(\ln 2)x+2-3\ln 2$； ………4 分

（2）$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点等价于 $h(x)=\frac{ax^2+x}{x+1}-\ln(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点，

则 $h'(x)=\frac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}$，$x\in(0,+\infty)$， ………7 分

①当$a \le 0$时，$\because h'(x)=\dfrac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}<0$，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上递减，

$\therefore h(x)<h(0)=0$，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上无零点，$\therefore a \le 0$不合题意； ………10 分

②当$a>0$时，（ⅰ）当$2-\dfrac{1}{a}\ge 0$时，即$a \ge \dfrac{1}{2}$时，

$\because h'(x)=\dfrac{x(ax+2a-1)}{x+1}=\dfrac{ax(x+2-\frac{1}{a})}{x+1}>0$，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上递增，

$\therefore h(x)>h(0)=0$，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上无零点，$\therefore a>\dfrac{1}{2}$不合题意； ………12 分

（ⅱ）当$2-\dfrac{1}{a}<0$时，即$0<a<\dfrac{1}{2}$时，令$h'(x)=0$，则$x=\dfrac{1}{a}-2$，

令$h'(x)<0$，则$0<x<\dfrac{1}{a}-2$；令$h'(x)>0$，则$x>\dfrac{1}{a}-2$，

$\therefore h(x)$在$(0,\dfrac{1}{a}-2)$上递减，在$(\dfrac{1}{a}-2,+\infty)$上递增，$\therefore h(\dfrac{1}{a}-2)<h(0)=0$， ………14 分

取$x_0=\dfrac{2}{a^2}\ (>\dfrac{1}{a}-2)$时，$\because e^{ax_0}-(x_0+1)>1+ax_0+\dfrac{1}{2}a^2{x_0}^2-(x_0+1)$

$>\dfrac{1}{2}a^2{x_0}^2-x_0=\dfrac{1}{2}x_0(a^2x_0-2)=0$，$\therefore ax_0>\ln(x_0+1)$，

$\therefore h(x_0)=\dfrac{a{x_0}^2+x_0}{x_0+1}-\ln(x_0+1)>\dfrac{a{x_0}^2+ax_0}{x_0+1}-\ln(x_0+1)=ax_0-\ln(x_0+1)>0$，

$\therefore \exists x_1\in(\dfrac{1}{a}-2,x_0)$，使得$f(x_1)=0$，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{2}$符合题意；

综上，a的取值范围为$(0,\dfrac{1}{2})$. ………17 分

19.解：（1）由题意得$\boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\otimes\boldsymbol{a}=-[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\otimes\boldsymbol{a}]=-(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a})$

$=-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}$； ………6 分

（2）设$\angle AEB=\theta(0<\theta<\pi)$，$S[EFG]=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EF}\otimes\overrightarrow{EG})=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})\otimes\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EB})]$

$=\dfrac{1}{8}[(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})\otimes(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EB})]=\dfrac{1}{8}(\overrightarrow{EA}\otimes\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}\otimes\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\otimes\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}\otimes\overrightarrow{EB})$

$=\dfrac{1}{8}(\overrightarrow{EA}\otimes\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\otimes\overrightarrow{ED})=\dfrac{1}{8}(\overrightarrow{EA}\otimes\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{ED}\otimes\overrightarrow{EC})=\dfrac{1}{4}(S[EAB]-S[EDC])$，

$\therefore$四边形$ABCD$的面积等于△EFG的面积的 4 倍； ………12 分

（3）证明：$\because \vec{i}=(1,0)$，$\vec{j}=(0,1)$，$\therefore \vec{i}\otimes\vec{i}=\vec{j}\otimes\vec{j}=0$，$\vec{i}\otimes\vec{j}=1,\vec{j}\otimes\vec{i}=-1$，

$\because A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$\therefore \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$，$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1)\vec{i}+(y_3-y_1)\vec{j}$，

$\therefore S[ABC]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\otimes\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\{[(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}]\otimes[(x_3-x_1)\vec{i}+(y_3-y_1)\vec{j}]\}$

$=\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)]=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)$，

$\therefore\triangle ABC$ 面积为$\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3|$.　　　　　　　　………17 分

注：以上各题其它解法请酌情赋分.