

2024年高三年级模拟考试(二)

数 学 试 卷

(考试时间:下午3:00—5:00)



注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷1至4页,第 II 卷5至8页。
2. 回答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | 2^x > 1\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $(-2, 0)$
 - B. $(0, 3)$
 - C. $(1, 3)$
 - D. $(-2, +\infty)$
2. 在复平面内, $(1 + 2i)(2 - i)$ 对应的点的坐标是
 - A. $(0, 3)$
 - B. $(3, 0)$
 - C. $(4, -3)$
 - D. $(4, 3)$
3. 已知 $|a| = |b| = 1, |c| = \sqrt{3}, a + b + c = 0$, 则 a 与 b 的夹角为
 - A. 30°
 - B. 45°
 - C. 60°
 - D. 120°

4. 某校高二年级学生中有60%的学生喜欢打篮球,40%的学生喜欢打排球,80%的学生喜欢打篮球或排球。在该校高二年级的学生中随机调查一名学生,若该学生喜欢打篮球;则他也喜欢打排球的概率为
 - A. $\frac{1}{3}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $\frac{2}{3}$
 - D. $\frac{3}{4}$

5. 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别是等差数列和等比数列,其前 n 项和分别是 S_n 和 T_n , 且 $a_1 = b_1 = 1, a_2 + b_2 = 4, T_3 = 3$, 则 $S_3 =$
 - A. 9
 - B. 9或18
 - C. 13
 - D. 13或37

6. 已知圆锥的顶点为 P , 底面圆的直径 $AB = 2\sqrt{3}, \tan \angle APB = \sqrt{3}$, 则该圆锥内切球的体积为
 - A. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$
 - B. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$
 - C. $\frac{4\pi}{3}$
 - D. 4π

7. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a = 4, b = 6, B = 2A$, 则 $c =$
 - A. 5
 - B. 4或5
 - C. 6
 - D. 4或6

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 1, & x > 1 \end{cases}$ 若方程 $f(x) - k|x + 2| = 0$ 恰有三个不同实数根, 则实数 k 的取值范围是

- A. $(0, 8 - 2\sqrt{13}) \cup (1, +\infty)$
- B. $(\frac{2}{3}, \frac{e+1}{3}]$
- C. $(\frac{2}{3}, 8 - 2\sqrt{13}) \cup (1, \frac{e+1}{3}]$
- D. $(\frac{2}{3}, 1) \cup [\frac{e+1}{3}, 8 + 2\sqrt{13})$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求的.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

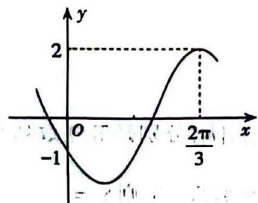
9. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \theta)$ ($A > 0, \omega > 0, -\pi < \theta < 0$) 的部分图象如图所示,则下列结论正确的是

A. $\theta = -\frac{\pi}{3}$

B. $f(x)$ 的周期 $T = \pi$

C. $f(x)$ 图象关于点 $(-\frac{13\pi}{12}, 0)$ 对称

D. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$ 上递减



10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n + n, & n \text{ 为奇数} \\ a_n - 2n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则下列结论正确的是

A. $\{a_n\}$ 是递增数列

B. $\{a_{2n} - 2\}$ 是等比数列

C. 当 n 是偶数时, $a_n = 2 - (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}$

D. $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_{2m-1} > a_{2n}$

11. 已知两定点 $A(-2, 0), B(1, 0)$, 动点 M 满足条件 $|MA| = 2|MB|$, 其轨迹是曲线 C , 过 B 作直线 l 交曲线 C 于 P, Q 两点, 则下列结论正确的是

A. $|PQ|$ 取值范围是 $[2\sqrt{3}, 4]$

B. 当点 A, B, P, Q 不共线时, $\triangle APQ$ 面积的最大值为 6

C. 当直线 l 斜率 $k \neq 0$ 时, AB 平分 $\angle PAQ$

D. $\tan \angle PAQ$ 最大值为 $\sqrt{3}$

2024年高三年级模拟考试(二)

数学试卷

第II卷(非选择题 共90分)

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 函数 $f(x) = xe^x$ 的单调递增区间是_____.

13. (本小题第一空2分,第二空3分)为获得某校高一年级全体学生的身高信息,现采用样本量按比例分配的分层随机抽样方法抽取了一个样本,其中有30名男生和20名女生,计算得男生样本的均值为170,方差为15,女生样本的均值为160,方差为30,则由上述数据计算该校高一年级学生身高的均值是_____,方差是_____.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 1, b > 0)$ 的右焦点是 $F(2,0)$, 动点 $P(x,y) (x > 0)$ 在 C 上. 若过点 P 作 C 的切线与直线 $x=1$ 相交时,记其交点为 $Q, \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{QF} = 0$ 恒成立,则 $\frac{x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围为_____.

四、解答题:本大题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

一款便携式行李箱的密码是由数字1,2,3组成的一个五位数,这三个数字的每个数字在密码中至少出现一次,且它们出现的概率相等.

- (1)求该款行李箱密码的不同种数;
- (2)记 X 表示该款行李箱密码中数字1出现的次数,求 X 的分布列和数学期望.

16. (本小题满分15分)

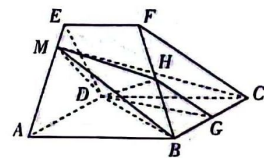
已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 $D(2,1)$ 且斜率为1的直线经过点 F .

- (1)求抛物线 C 的方程;
- (2)若 A, B 是抛物线 C 上两个动点,在 x 轴上是否存在定点 M (异于坐标原点 O),使得当直线 AB 经过点 M 时,满足 $OA \perp OB$? 若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,请说明理由.

17. (本小题满分15分)

如图,在多面体 $ABCDEF$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle ADE$ 是边长为8的正三角形, $EF \parallel AB$, 且 $EF = 4$, 点 G, H 分别是 BC, BF 的中点.

- (1)设 AE 与平面 DGH 相交于点 M , 求 $\frac{EM}{MA}$ 的值;
- (2)求平面 BDM 与平面 CDM 夹角的余弦值.



18. (本小题满分17分)

已知函数 $f(x) = ax + 1 - (1 + \frac{1}{x})\ln(x + 1)$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
 (2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题满分17分)

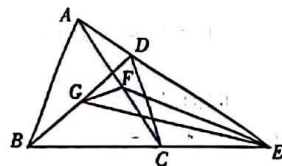
已知两个非零向量 a, b , 将向量 a 绕着它的起点沿逆时针方向旋转 $\theta (\theta \in [0, 2\pi))$ 弧度后, 其方向与向量 b 的方向相同, 则 θ 叫做向量 a 到 b 的角. 已知非零向量 a 到 b 的角为 θ , 数量 $|a||b|\sin\theta$ 叫做向量 a 与 b 的 \otimes 运算, 记作 $a \otimes b$, 即 $a \otimes b = |a||b|\sin\theta$. 根据此定义, 不难证明以下性质: ① $a \otimes b = -b \otimes a$; ② $(\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b) = \lambda(a \otimes b)$; ③ $(a+b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c$.

(1) 利用以上性质证明: $a \otimes (b+c) = a \otimes b + a \otimes c$;

(2) 设 \overline{OA} 到 \overline{OB} 的角为 θ , 定义 $S[OAB] = \frac{1}{2}(\overline{OA} \otimes \overline{OB})$. 当 $0 < \theta < \pi$ 时, 则 $S[OAB]$ 表示 $\triangle OAB$ 面积; 当 $\pi < \theta < 2\pi$ 时, 则 $S[OAB]$ 表示 $\triangle OAB$ 面积的相反数. 利用上述定义和性质证明:

① 如图, 四边形 $ABCD$ 的两边 AD, BC 延长相交于点 E , 对角线 AC, BD 的中点为 F, G , 求证: 四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\triangle EFG$ 的面积的四倍;

② 在平面直角坐标系中, 记向量 $i = (1, 0), j = (0, 1)$, $\triangle ABC$ 各顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 求证: $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3|$.



第 八 页 共 八 页