太原市2024年高三年级模拟考试（三）

数学参考答案及评分建议

一．选择题： C　A　B　D　A　D　C　B

二．选择题： ACD　　AC　　AB

三．填空题： 12. $(0,1)$　13. $\sqrt{3}$　14. $\dfrac{3}{2}$

四．解答题：本题共5小题，共77分.

15.解:（1）设数列$\{a_n\}$的公比为q，由$\{S_n+1\}$也是等比数列得$(S_2+1)^2=(S_1+1)(S_3+1)$，

$\therefore (q+2)^2=2\times(q^2+q+2)$，$\therefore q=2$或$q=0$（舍去），　　………5分

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}(n\in\mathrm{N}^*)$.　　………7分

（2）由（1）得$a_n=2^{n-1}$，$b_n=a_n\cdot\log_2 a_{n+1}=n\cdot 2^{n-1}(n\in\mathrm{N}^*)$，　　………9分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times 2^0+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^{\mathrm{n}-1}$，①

$\therefore 2T_n=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^{\mathrm{n}}$，②

①-②得$-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^{\mathrm{n}}$，

$\therefore T_n=(n-1)\cdot 2^{\mathrm{n}}+1$.　　………13分

16.解：（1）由题意得

疫苗	流感		合计
	感染	未感染	
接种	130	570	700
未接种	70	230	300
合计	200	800	1000

………4分

零假设为H_0：接种流感疫苗与感染流感无关，　　………5分

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{1000\times(570\times 70-130\times 230)^2}{700\times 300\times 800\times 200}=\frac{125}{42}\approx 2.976>2.706=x_{0.10}，$$

根据小概率值$\alpha=0.10$的独立性检验，推断H_0不成立，即认为接种流感疫苗与感染流感有关，此推断犯错误的概率不超过0.10；　　………8分

接种流感疫苗中未感染流感和感染流感的频率分别为$\dfrac{57}{70}$和$\dfrac{13}{70}$，未接种流感疫苗中未感染流感和感染流感的频率分别为$\dfrac{23}{30}$和$\dfrac{7}{30}$，根据频率稳定于概率的原理，可以认为接种疫苗时未感染流感的概率大；　　………10分

（2）设$A=$“某人流感检测结果为阳性”，$B=$“此人感染流感”，

由题意得$P(B)=0.2$，$P(\overline{B})=0.8$，$P(A|B)=0.95$，$P(A|\overline{B})=0.01$，

$\therefore P(AB)=P(B)P(A|B)=0.2\times 0.95=0.19$，

$\therefore P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.2\times0.95+0.8\times0.01=0.198$，

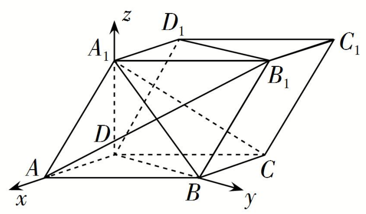
$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.19}{0.198}\approx0.96$. ………15 分

17.（1）证明：$\because A_1D\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore A_1D\perp AD, A_1D\perp BD$，

$\because AB=2AD$，$\angle DAB=60°$，$\therefore BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle DAB=3AD^2$，

$\therefore AB^2=BD^2+AD^2=4AD^2$，

$\therefore \angle ADB=90°$，$\therefore AD\perp BD$， ………3 分



$\therefore BD\perp$ 平面 ADD_1A_1，

$\therefore$ 平面 $BDD_1B_1\perp$ 平面 ADD_1A_1； ………5 分

（2）由（1）知 $A_1D\perp AD, A_1D\perp BD$，$AD\perp BD$，

以 D 为原点，DA, DB, DA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AD=1$，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,1)$，$D_1(-1,0,1)$，$B_1(-1,\sqrt{3},1)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 BDD_1B_1 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{DB},\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{DD_1},\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\sqrt{3}y_1=0,\\ -x_1+z_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=1$，则 $x_1=1, y_1=0$，$\therefore \vec{m}=(1,0,1)$， ………7 分

$\because \overrightarrow{AB_1}=(-2,\sqrt{3},1)$，$\therefore \cos<\vec{m},\overrightarrow{AB_1}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\vec{m}||\overrightarrow{AB_1}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{8}}=\dfrac{-1}{4}$，

$\therefore AB_1$ 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{4}$； ………10 分

（3）设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 AA_1B_1B 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AA_1},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AB},\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-x_2+z_2=0,\\ -x_2+\sqrt{3}y_2=0,\end{cases}$

取 $y_2=1$，则 $x_2=z_2=\sqrt{3}$，$\therefore \vec{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$， ………12 分

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

$\therefore$ 平面 AA_1B_1B 与平面 BB_1D_1D 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………15 分

18. 解：（1）由题意得 $A(-a,0), B(a,0)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{3+a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3-a}=\sqrt{2},\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a^2=3,\\ b^2=1,\end{cases}$ $\therefore \dfrac{x^2}{3}-y^2=1$； ………5 分

（2）由（1）得 $A(-\sqrt{3},0), B(\sqrt{3},0)$，

设直线 MN 的方程为 $x=ty+3(t\neq\pm\sqrt{3})$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{BN}=(x_2-\sqrt{3},y_2)$，

由 $\begin{cases}x=ty+3,\\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$ 得 $(t^2-3)y^2+6ty+6=0$，$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{6t}{t^2-3}$，$y_1y_2=\dfrac{6}{t^2-3}$， ………9 分

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})$，令 $x=1$，则 $y=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$，

$\therefore Q(1,\dfrac{(1+\sqrt{3})y_1}{x_1+\sqrt{3}})$，$\therefore \overrightarrow{BQ}=(1-\sqrt{3},\dfrac{(1+\sqrt{3})y_1}{x_1+\sqrt{3}})$， ………12 分

$\because (x_2-\sqrt{3})\cdot\dfrac{(1+\sqrt{3})y_1}{x_1+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{3})y_2=\dfrac{1}{x_1+\sqrt{3}}[(x_2-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})y_1-(1-\sqrt{3})(x_1+\sqrt{3})y_2]$

$=\dfrac{1}{x_1+\sqrt{3}}[(ty_2+3-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})y_1-(1-\sqrt{3})(ty_1+3+\sqrt{3})y_2]$

$=\dfrac{1}{x_1+\sqrt{3}}[(ty_2+3-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})y_1+(\sqrt{3}-1)(ty_1+3+\sqrt{3})y_2]=\dfrac{2\sqrt{3}}{x_1+\sqrt{3}}(ty_1y_2+y_1+y_2)$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{x_1+\sqrt{3}}(\dfrac{6t}{t^2-3}-\dfrac{6t}{t^2-3})=0$，$\therefore \overrightarrow{BN}\,//\,\overrightarrow{BQ}$，$\therefore B,N,Q$ 三点共线. ………17 分

19.（1）解：由题意得 $f'(x)=(1-x)(\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{x})$，$x>0$， ………2 分

$\because x>0$，$\therefore e^x>x>0$，$\therefore \dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{x}<0$，

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<1$；令 $f'(x)>0$，则 $x>1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增； ………4 分

$\therefore f(x)\geq f(1)=\dfrac{1}{e}+1-k\geq 0$，$\therefore k\leq\dfrac{1}{e}+1$，

$\therefore$ 实数 k 的取值范围 $(-\infty,\dfrac{1}{e}+1]$. ………6 分

（2）由（1）得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore 0<x_1<1<x_2$， ………8 分

令 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，$0<x<1$，

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=(1-x)[(\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{x})-(\dfrac{1}{e^{2-x}}-\dfrac{1}{2-x})]$， ………9 分

设 $h(x)=\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=\dfrac{e^x-x^2}{x^2e^x}$，

$\because e^x-x^2>1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3-x^2>\dfrac{1}{6}x[(x-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{15}{4}]>0$，$\therefore h'(x)=\dfrac{e^x-x^2}{x^2e^x}>0$，

$\therefore h(x)=\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

当 $0<x<1$ 时，则 $h(x)<h(2-x)$，即 $\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{e^{2-x}}-\dfrac{1}{2-x}$，　　　　………11 分

$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，$\therefore g(x)>g(1)=0$，　　　　………13 分

$\therefore g(x_1)=f(x_1)-f(2-x_1)>0$，$\therefore f(x_2)=f(x_1)>f(2-x_1)$，　　　　………15 分

$\because f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore x_2>2-x_1$，$\therefore x_1+x_2>2$.　　　　………17 分

注：以上各题其它解法请酌情赋分.